JOURNAL OF ALGEBRA **206,** 135–169, 1998
ARTICLE NO. JA977415

Anneaux de valuation discrète et modules des différentielles

Michel André

Département de Mathématiques, Ecole Polytechnique Fédérale, CH-1015,

Received July 28, 1997

The module of Kähler differentials of a commutative G-algebra X is essentially described by two cardinals and two integers when X is a valuation ring and when the residue extension is good enough. The first cardinal and the two integers have been described by R. Berger and E. Kunz. The last cardinal deals with the divisible part of the torsion of the module of differentials. It is proved to be finite and given by an equality involving the Krull dimension and the module of imperfection.

INTRODUCTION

Considérons un anneau de valuation discrète X, d'uniformisante ξ, de corps des fractions K et de corps résiduel C. Un X-module W est dit quasi-fini si on a la propriété suivante

$$\dim_C W/\xi W < +\infty.$$

Un module quasi-fini est presque complètement décrit dans le cas général et complètement décrit dans le cas complet par quatre modules plus simples:

un module divisible sans torsion de la forme $\sum K$ (a copies),

un module divisible de torsion de la forme $\sum K/X$ (b copies),

un module libre de rang fini c,

un module de type fini et de torsion avec d générateurs.

Les cardinaux a et b peuvent être infinis.

0021-8693/98 $25.00

Considérons un anneau local noethérien G, de corps des fractions E et de corps résiduel S. Considérons aussi un monomorphisme local avec une condition pour le module des différentielles de l'extension résiduelle

$$G \to X \qquad \text{avec} \quad \dim_C H_0(S,C,C) < +\infty$$

et même un peu plus en caractéristique positive (voir le Lemme 34 et la Condition 35). Mais alors le X-module des différentielles de la G-algèbre X est quasi-fini

$$W = H_0(G,X,X)$$

et il s'agit de déterminer les cardinaux a et b ainsi que les entiers c et d.

En premier lieu on a deux égalités élémentaires impliquant les deux extensions de corps (voir les Propositions 25 et 26)

$$a + c = \dim_K H_0(E,K,K) \qquad \text{et} \qquad c + d = \dim_C H_0(S,C,C) + 0 \text{ ou } 1$$

pour déterminer a et d à partir de c. Dans leur travail fondamental sur le sujet, R. Berger et E. Kunz ont déterminé l'entier c de manière astucieuse, en remplaçant l'anneau de base G par un anneau de valuation discrète bien choisi et en modifiant l'extension résiduelle en conséquence (voir [5, Propositions 8 et 12]). Leur résultat est redémontré dans le présent travail et cela par voie homologique (voir les Théorèmes 55 et 60).

En fait le cardinal b est fini (voir la Proposition 30) et le présent travail détermine la différence $b - c$. Lorsque G est complet (ou seulement excellent) l'égalité suivante est démontrée

$$b - c = (\dim G - 1) - d.\text{tr}\, C/S - \dim_K H_1(E,K,K).$$

Donc l'anneau de base G intervient par sa dimension de Krull, l'extension résiduelle C/S par son degré de transcendance et l'autre extension de corps K/E par son module d'imperfection (voir le Théorème 43). Lorsque G est quelconque, l'égalité reste vraie si on modifie le module d'imperfectionet si on ajoute un entier supplémentaire obtenu à l'aide du noyau de l'homomorphisme de $\hat{G}$ dans $\hat{X}$, les deux anneaux complétés (voir les Théorèmes 48 et 65 avec les Définitions 45 et 62, et pour le cas G excellent, l'Exemple 47, la Remarque 63 et la Proposition 68).

MODULES QUASI-FINIS SUR UN ANNEAU DE VALUATION DISCRÈTE

Soit X un anneau de valuation discrète, d'uniformisante ξ, de corps résiduel C et de corps des fractions K. Son complété-séparé $\hat{X}$ a la même uniformisante ξ, le même corps résiduel C et le corps des fractions suivant

$$L \cong \hat{X}_\xi \cong \hat{X} \otimes_X X_\xi \cong \hat{X} \otimes_X K.$$

DEFINITION 1. Un X-module W satisfaisant à la condition suivante est dit quasi-fini

$$\dim_C W/\xi W < +\infty.$$

Un module de type fini est quasi-fini et a la forme suivante

$$W \cong (X)^c \oplus \sum_{k \geq 1} (X/\xi^k X)^{d_k}$$

(l'entier c est quelconque et les entiers d_k sont presque tous nuls, de somme d). Un module divisible est quasi-fini et a la forme suivante

$$W \cong (K)^a \oplus (K/X)^b$$

(les cardinaux a et b sont quelconques). Tout module W a un plus grand sous-module divisible W_{div}. La suite exacte

$$0 \to W_{\text{div}} \to W \to W/W_{\text{div}} \to 0$$

est scindée, puisque W_{div} est un module injectif.

LEMME 2. *On a un isomorphisme*

$$W \cong (K/X)^b \oplus \sum_{k \geq 1} (X/\xi^k X)^{d_k}$$

pour tout module quasi-fini de torsion W.

Il existe un sous-module V de type fini et un entier $e > 0$ avec la propriété suivante

$$W = V + \xi^e W \qquad \text{et} \qquad \xi^e V = 0.$$

L'égalité suivante donne l'inclusion suivante

$$\xi^e W = \xi^{2e} W \qquad \text{et} \qquad W_{\text{div}} \supset \xi^e W.$$

Mais alors le module W/W_{div} est de type fini comme quotient de V. On termine la démonstration grâce aux remarques de la Définition 1.

LEMME 3. *On a une suite exacte*

$$0 \to (X)^c \to W \to (K)^a \to 0$$

pour tout module quasi-fini sans torsion W.

Il existe un sous-module V de type fini avec la propriété suivante

$$W = V + \xi W \qquad \text{et} \qquad V/\xi V \cong W/\xi W.$$

Le module V de type fini et sans torsion est libre de rang c. La suite exacte

$$\mathrm{Ann}_W \xi \to \mathrm{Ann}_U \xi \to V/\xi V \to W/\xi W \to U/\xi U \to 0$$

donne les propriétés suivantes

$$\mathrm{Ann}_U \xi = 0 \qquad \text{et} \qquad U \text{ est sans torsion},$$
$$U/\xi U = 0 \qquad \text{et} \qquad U \text{ est divisible},$$

pour le module-quotient $U = W/V$, qui a donc bien la forme $(K)^a$.

LEMME 4. *Soit une suite exacte*

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0.$$

Alors W est quasi-fini si W' et W'' le sont et W'' est quasi-fini si W l'est. Si la suite exacte est scindée ou si W'' est sans torsion, alors W' est quasi-fini si W l'est.

Ce sont des conséquences immédiates de la suite exacte

$$W'/\xi W' \to W/\xi W \to W''/\xi W'' \to 0$$

(éventuellement prolongée par 0 à gauche).

Une somme directe d'une infinité de copies de la suite exacte standard

$$0 \to X \to K \to K/X \to 0$$

est un exemple d'une suite exacte avec W quasi-fini sans que W' le soit.

LEMME 5. *Soit W_{tor} le plus grand sous-module de torsion de W. La suite exacte*

$$0 \to W_{\mathrm{tor}} \to W \to W/W_{\mathrm{tor}} \to 0$$

est scindée pour tout module quasi-fini W.

Puisque le quotient W/W_{tor} est sans torsion, le Lemme 4 s'applique et on a deux autres modules quasi-finis W_{tor} et W/W_{tor} que les Lemmes 2 et 3 décrivent:

$$W_{\mathrm{tor}} \cong (K/X)^b \oplus \sum_{k \geq 1} (X/\xi^k X)^{d_k}$$
$$0 \to (X)^c \to W/W_{\mathrm{tor}} \to (K)^a \to 0.$$

On termine la démonstration en remarquant que

$$\operatorname{Ext}^1_X(U,V) \cong 0$$

dans les trois cas suivants:

(1) U est libre,

(2) V est divisible,

(3) $U = K$ et $V = X/\xi^k X$.

LEMME 6. *On a une égalité*

$$W_{\mathrm{div}} = \bigcap_{m \geq 1} \xi^m W$$

pour tout module quasi-fini W.

Grâce aux Lemmes 2 et 5 il suffit de traiter le cas où W est sans torsion. Il s'agit de considérer une famille d'éléments

$$w \text{ et } w_m \in W \qquad \text{avec } w = \xi^m w_m$$

et d'en déduire une famille d'éléments

$$w'_m \in W \qquad \text{avec } w = w'_0 \text{ et } w'_m = \xi w'_{m+1}$$

ce qui est clair avec $w'_m = w_m$.

Ce lemme démontre que le module W/W_{div} (de la suite exacte scindée de la Définition 1) est séparé.

PROPOSITION 7. *Soit un X-module quasi-fini W. Alors il existe un X-module séparé sans torsion V, puis un isomorphisme de X-modules*

$$W \cong (K)^{a'} \oplus (K/X)^b \oplus \sum_{k \geq 1} (X/\xi^k X)^{d_k} \oplus V,$$

enfin une suite exacte de X-modules

$$0 \to (X)^c \to V \to (K)^{a''} \to 0.$$

Les cardinaux a', a'', b et les entiers c, d_k, ainsi que le module V, sont déterminés par W.

Par les deux suites exactes scindées (Définition 1 et Lemme 5) la démonstration d'existence se ramène aux trois cas suivants:

(1) W divisible (voir la Définition 1),

(2) W séparé de torsion (voir le Lemme 2),

(3) W séparé sans torsion (voir le Lemme 3).

Pour démontrer l'unicité on construit les modules auxiliaires

$$M = W_{\mathrm{div}}, \qquad M' = M_{\mathrm{tor}}, \qquad M'' = M/M',$$
$$N = W/M, \qquad N' = N_{\mathrm{tor}}, \qquad N'' = N/N',$$

et on remarque les isomorphismes suivants

$$M' \cong (K/X)^b \qquad \text{avec } b = \dim_C \mathrm{Ann}_{M'} \xi,$$

$$M'' \cong (K)^{a'} \qquad \text{avec } a' = \dim_K M'',$$

$$N' \cong \sum_{k \geq 1} (X/\xi^k X)^{d_k} \qquad \text{avec } \sum_{k \geq e} d_k = \dim_C \xi^{e-1} N'/\xi^e N',$$

$$N'' \cong V \qquad \text{avec } c = \dim_C V/\xi V,\ a'' + c = \dim_K V \otimes_X K.$$

Remarque 8. Le X-module $\hat{X}$ est quasi-fini, séparé et sans torsion. Il apparaît dans la suite exacte standard

$$0 \to X \to \hat{X} \to \hat{X}/X \cong L/K \to 0.$$

Toute suite exacte de X-modules

$$0 \to (X)^c \to V \to (K)^a \to 0$$

s'obtient à l'aide de la suite exacte standard prise c fois

$$0 \to (X)^c \to (\hat{X})^c \to (L/K)^c \to 0$$

et d'un homomorphisme de K-modules

$$\sigma : (K)^a \to (L/K)^c.$$

Mais alors le X-module quasi-fini et sans torsion V est séparé si et seulement si l'homomorphisme σ est injectif. Il faut encore remarquer que, même s'il détermine a et c, le module V ne détermine pas l'extension dont il est le module central. Les résultats de cette remarque ne sont pas utilisés par la suite.

COROLLAIRE 9. *Pour un X-module quasi-fini W il existe un isomorphisme de X-modules*

$$W \cong (K)^a \oplus (K/X)^b \oplus (X)^c \oplus \sum_{k \geq 1} (X/\xi^k X)^{d_k},$$

si l'anneau X est complet. En particulier un module quasi-fini et séparé est de type fini.

Il s'agit de démontrer que la suite exacte de la Proposition 7 est scindée, car alors $(K)^{a''}$ est séparé et a'' est nul. Il suffit de démontrer le cas particulier suivant du théorème de Chevalley

$$\mathrm{Ext}^1_X(K,X) \cong 0 \qquad \text{pour } X \text{ complet.}$$

Sans supposer X complet on a deux suites exactes

$$\mathrm{Hom}_X(K,K) \to \mathrm{Hom}_X(K,K/X) \to \mathrm{Ext}^1_X(K,X) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_X(K/X,K/X) \to \mathrm{Hom}_X(K,K/X) \to \mathrm{Hom}_X(X,K/X) \to 0$$

et trois isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_X(K,K) \cong K, \qquad \mathrm{Hom}_X(X,K/X) \cong K/X,$$

$$\mathrm{Hom}_X(K/X,K/X) \cong \hat{X}$$

(pour ce dernier isomorphisme, voir [11, Théorème 5.14], puisque K/X est l'enveloppe injective du X-module $X/\xi X$). On a donc un isomorphisme final

$$\mathrm{Ext}^1_X(K,X) \cong \hat{X}/X$$

d'où la conclusion dans le cas complet.

DÉFINITION 10. La Proposition 7 permet de définir les quatre cardinaux d'un module quasi-fini

$$a = a' + a'', \quad b, \quad c < +\infty \qquad \text{et} \qquad d = \sum_{k\geq 1} d_k < +\infty.$$

Un module quasi-fini avec a et b finis est dit clair. Avec un X-module quasi-fini W on a le $\hat{X}$-module quasi-fini $\hat{X} \otimes_X W$ qui a les mêmes cardinaux a,b,c,d. Par la suite, pour certains modules quasi-finis, on déterminera l'entier c, puis les autres cardinaux à l'aide de trois égalités concernant a, b et d. Pour le moment ces trois égalités ont la forme suivante.

Remarque 11. Avec un module quasi-fini W on a une première égalité élémentaire

$$a + c = \dim_K W \otimes_X K.$$

Avec une suite exacte de modules quasi-finis

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0$$

on a une égalité évidente

$$(a + c) = (a' + c') + (a'' + c'').$$

Remarque 12. Avec un module quasi-fini W on a une deuxième égalité élémentaire

$$c + d = \dim_C W \otimes_X C.$$

Avec une suite exacte de modules quasi-finis

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0$$

on a une inégalité évidente

$$(c + d) \leq (c' + d') + (c'' + d'').$$

C'est une égalité dans les deux cas particuliers du Lemme 4: suite exacte scindée ou W'' sans torsion ($b'' = 0 = d''$).

Remarque 13. Avec un module quasi-fini W on a une troisième égalité élémentaire

$$b - c = \dim_C \mathrm{Ann}_W \xi - \dim_C W \otimes_X C.$$

Avec une suite exacte de modules quasi-finis

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0$$

on a une égalité

$$(b - c) = (b' - c') + (b'' - c'')$$

qui découle de la suite exacte de C-modules

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ann}_{W'} \xi \to \mathrm{Ann}_W \xi \to \mathrm{Ann}_{W''} \xi \\ \to W'/\xi W' \to W/\xi W \to W''/\xi W'' \to 0. \end{aligned}$$

LEMME 14. *Soit une suite exacte*

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0.$$

Alors W est clair si et seulement si W' et W'' sont clairs.

Si les trois modules sont quasi-finis on a l'égalité suivante (due aux égalités des Remarques 11 et 13) qui permet de conclure:

$$(a + b) = (a' + b') + (a'' + b'').$$

Il reste à supposer W clair et à démontrer W' quasi-fini. On sait déjà que W'' est quasi-fini (voir le Lemme 4). Vu la suite exacte

$$\mathrm{Ann}_{W''} \xi \to W'/\xi W' \to W/\xi W$$

il suffit de démontrer que b'' est fini. On démontre que $a'' + b''$ est fini à l'aide du foncteur décrit dans la remarque suivante. Les modules clairs ne seront pas utilisés par la suite.

Remarque 15. Il existe un foncteur additif exact T de la catégorie des X-modules dans la catégorie des L-modules avec les deux propriétés suivantes

$$T(X) \cong 0 \qquad \text{et} \qquad T(K/X) \cong L.$$

Il s'agit du foncteur suivant dû au X-module divisible $L/\hat{X}$ et au $\hat{X}$-module divisible L

$$T(W) = \mathrm{Hom}_{\hat{X}}\big(\mathrm{Hom}_X\big(W, L/\hat{X}\big), L\big).$$

On a en effet

$$\mathrm{Hom}_{\hat{X}}\big(L/\hat{X}, L\big) \cong 0$$

d'une part et d'autre part

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_X\big(K/X, L/\hat{X}\big) &\cong \mathrm{Hom}_{\hat{X}}\big((K/X) \otimes_X \hat{X}, L/\hat{X}\big)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\hat{X}}\big(L/\hat{X}, L/\hat{X}\big) \cong \hat{X}\end{aligned}$$

puisque le $\hat{X}$-module $L/\hat{X}$ est l'enveloppe injective du $\hat{X}$-module C (voir [11, Théorème 5.14]). Dans le cas d'un X-module clair on a

$$\dim_L T(W) = a + b$$

et cette dimension est infinie dans le cas d'un module quasi-fini qui n'est pas clair.

Remarque 16. Complétons la Remarque 13. Avec une suite exacte de modules quasi-finis

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0$$

on a deux suites exactes de modules quasi-finis de torsion

$$0 \to W'_{\mathrm{tor}} \to W_{\mathrm{tor}} \to W^* \to 0$$

$$0 \to W^* \to W''_{\mathrm{tor}} \to W^{**} \to 0$$

qui donnent deux égalités

$$b = b' + b^* \qquad \text{et} \qquad b'' = b^* + b^{**}.$$

On a donc les inégalités que voici

$$b' \leq b \leq b' + b''.$$

En particulier b' et b sont égaux si b'' est nul.

A la fin de ce travail le résultat suivant sera utilisé.

Remarque 17. Considérons deux suites exactes décrivant le même module T

$$V' \xrightarrow{i} T \xrightarrow{p} V \to 0 \qquad \text{avec } V \text{ sans torsion,}$$

$$W' \xrightarrow{j} T \xrightarrow{q} W \to 0 \qquad \text{avec } W' \text{ divisible et } W \text{ de type fini.}$$

Puis considérons les modules

$$\overline{W} = \operatorname{Im} q \circ i \qquad \text{et} \qquad \overline{V} = \operatorname{Im} p \circ j$$

et le module

$$\operatorname{Coker} q \circ i \cong \Omega \cong \operatorname{Coker} p \circ j.$$

On a donc deux suites exactes

$$0 \to \overline{V} \to V \to \Omega \to 0$$
$$0 \to \overline{W} \to W \to \Omega \to 0$$

où $\overline{W}$ et Ω sont de type fini et où $\overline{V}$ est divisible sans torsion. Mais alors V est aussi quasi-fini. Ces deux dernières suites exactes concernent donc cinq modules quasi-finis, avec l'entier b nul les cinq fois. Par la Remarque 13 on a le résultat que voici. L'entier c du module W est égal à la somme des entiers c des modules $\overline{W}$ et V.

MODULES DES DIFFÉRENTIELLES SUR UN ANNEAU DE VALUATION DISCRÈTE

Soit une G-algèbre X avec G supposé noethérien et avec X supposé de valuation discrète. Considérons le X-module des différentielles $H_0(G, X, X)$ et de manière auxiliaire le X-module $H_n(G, X, U)$ pour un entier n quelconque et pour un X-module U quelconque. Pour l'étude du module des différentielles $H_0(G, X, X)$ on peut quotienter G autant que faire se peut et localiser G autant que faire se peut. Finalement on a un homomorphisme de structure $G \to X$ qui est un monomorphisme local entre anneaux locaux, monomorphisme que l'on peut toujours remplacer par une injection. L'anneau local G a l'idéal maximal M (contenu dans ξX), le corps résiduel S (contenu dans C) et le corps des fractions E (contenu dans K).

Rappelons quelques résultats de l'homologie commutative (c'est-à-dire de la théorie du complexe cotangent). Le B-module $H_n(A, B, U)$ est défini pour toute A-algèbre B et pour tout B-module U (voir [1, Définition 3.11]).

Rappel 18. Pour toute A-algèbre B, pour toute B-algèbre C et pour tout C-module U, il existe une suite exacte de C-modules, dite de Jacobi-Zariski (en bref suite JZ, voir [1, Théorème 5.1])

$$\dots \to H_n(A,C,U) \to H_n(B,C,U) \to$$
$$H_{n-1}(A,B,U) \to H_{n-1}(A,C,U) \to \dots .$$

Rappel 19. Pour toute A-algèbre B et pour toute suite exacte courte de B-modules

$$0 \to U' \to U \to U'' \to 0,$$

il existe une suite exacte de B-modules, dite des coefficients variables (en bref suite CV, voir [1, Lemme 3.22])

$$\dots \to H_n(A,B,U) \to H_n(A,B,U'') \to$$
$$H_{n-1}(A,B,U') \to H_{n-1}(A,B,U) \to \dots .$$

Rappel 20. Pour toute A-algèbre-quotient $B = A/I$, il existe des isomorphismes (voir [1, Propositions 6.1 et 6.3])

$$H_0(A,B,U) \cong 0 \qquad \text{et} \qquad H_1(A,B,U) \cong \left(I/I^2\right) \otimes_B U.$$

Pour A noethérien et U de type fini, tous les modules $H_n(A,B,U)$ sont de type fini (voir [1, Proposition 4.55]). Si I est monogène, engendré par un non-diviseur de zéro, alors tous les modules $H_n(A,B,U)$ sont nuls pour $n \neq 1$ (voir [1, Remarque 6.20]).

Rappel 21. Dans le cas d'une extension de corps $A \subset B$, on a (voir [1, Proposition 7.4])

$$H_n(A,B,B) \cong 0 \qquad \text{pour } n \geq 2.$$

Le B-module $H_1(A,B,B)$, dit module d'imperfection, est nul si et seulement si l'extension est séparable.

Rappel 22. Il existe un isomorphisme

$$H_n(A,B,U) \cong H_n(A,B,B) \otimes_B U$$

sans hypothèse si n est nul et sinon avec l'hypothèse d'un B-module plat U (voir [1, Lemme 3.20]).

Rappel 23. Pour un ensemble multiplicativement clos S de A, il existe un isomorphisme pour toute $S^{-1}A$-algèbre B

$$H_n(A,B,U) \cong H_n(S^{-1}A,B,U).$$

Pour un ensemble multiplicativement clos T de B, il existe un isomorphisme pour tout $T^{-1}B$-module U

$$H_n(A,B,U) \cong H_n(A,T^{-1}B,U)$$

(voir [1, Corollaire 5.27]).

Par la suite on utilisera librement toutes ces propriétés de l'homologie commutative.

Revenons à la G-algèbre X et au module de ses différentielles.

Condition 24. L'extension résiduelle est soumise à la condition de finitude suivante

$$\dim_C H_0(S,C,C) < +\infty.$$

Si la caractéristique résiduelle est nulle, cela signifie que le degrée de transcendance est fini. Si la caractéristique résiduelle est positive, ce n'est plus le cas et la condition sera renforcée par la suite. Une double inclusion $G \subset G' \subset X$ donne un épimorphisme de C-modules

$$H_0(S,C,C) \to H_0(S',C,C).$$

Donc on ne perd pas la condition de finitude (et ses conséquences) en remplaçant G par G'. Le X-module $H_0(G,X,X)$ est quasi-fini grâce à la suite JZ

$$H_1(X,C,C) \to H_0(G,X,C) \to H_0(G,C,C)$$

complétée par les isomorphismes suivants

$$H_0(G,X,X)/\xi H_0(G,X,X) \cong H_0(G,X,C)$$

$$H_1(X,C,C) \cong C \qquad \text{et} \qquad H_0(G,C,C) \cong H_0(S,C,C).$$

Dorénavant la condition de finitude est toujours supposée satisfaite. Une fois pour toutes, notons que le X-module quasi-fini $H_0(G,X,X)$ et le $\hat{X}$-module quasi-fini

$$H_0(G,X,\hat{X}) \cong H_0(G,X,X) \otimes_X \hat{X}$$

ont les mêmes cardinaux a, b, c, d.

PROPOSITION 25. *Pour le X-module quasi-fini* $H_0(G,X,X)$ *on a la première égalité élémentaire*

$$a + c = \dim_K H_0(E,K,K)$$

qui détermine le cardinal a à partir de l'entier c.

Vu l'isomorphisme suivant dû aux Rappels 22 et 23, il s'agit de la Remarque 11

$$H_0(G,X,X) \otimes_X K \cong H_0(E,K,K).$$

PROPOSITION 26. *Pour le X-module quasi-fini* $H_0(G,X,X)$ *on a la seconde égalité élémentaire*

$$c + d = \dim_C H_0(S,C,C) + \lambda$$

où λ *est égal à* 0 *ou à* 1.

On prolonge la suite JZ de la Condition 24, complétée par les mêmes isomorphismes et en outre par l'égalité de la Remarque 12

$$H_1(G,C,C) \xrightarrow{\Phi} H_1(X,C,C) \to H_0(G,X,C) \to H_0(G,C,C) \to 0,$$
$$c + d = \dim_C H_0(G,X,C).$$

On a alors l'égalité du lemme avec $\lambda = 0$ si Φ n'est pas nul et avec $\lambda = 1$ si Φ est nul.

LEMME 27. *L'entier* λ *est égal à* 1 *si et seulement si l'homomorphisme de G-algèbres*

$$\pi : X/\xi^2 X \to X/\xi X$$

se relève en un homomorphisme ρ *de G-algèbres.*

La G-algèbre $X/\xi^2 X$ est une extension de la G-algèbre $X/\xi X$ par le $X/\xi X$-module $\xi X/\xi^2 X$

$$0 \to \xi X/\xi^2 X \to X/\xi^2 X \xrightarrow{\pi} X/\xi X \to 0.$$

A cette extension correspond un élément du premier module de cohomologie (voir [1, Proposition 16.12])

$$\omega \in H^1\big(G, X/\xi X, \xi X/\xi^2 X\big) \cong H^1(G,C,C).$$

Comme l'anneau C est un corps, on a un isomorphisme (voir [1, Lemme 3.21])

$$H^1(G,C,C) \cong \mathrm{Hom}_C\big(H_1(G,C,C),C\big)$$

et l'élément ω correspond à l'homomorphisme

$$\Phi : H_1(G,C,C) \to H_1(X,C,C) \cong C.$$

Mais alors cet homomorphisme est nul si et seulement si l'extension en question est un produit semi-direct.

Remarque 28. Il est élémentaire de constater que la condition nécessaire et suffisante du lemme peut être scindée en deux parties:

(1) l'idéal maximal M de G est contenu dans $\xi^2 X$ (l'homomorphisme π devient alors un homomorphisme de G/M-algèbres ce qui permet d'exprimer la seconde partie de la condition),

(2) l'homomorphisme $\pi : X/\xi^2 X \to X/\xi X$ se relève en un homomorphisme ρ de S-algèbres.

Lorsque la caractéristique résiduelle est nulle, la seconde partie de la condition est toujours satisfaite. Lorsque la caractéristique résiduelle est positive, la seconde partie de la condition est satisfaite si l'extension résiduelle est séparable.

EXEMPLE 29. Considérons le cas particulier suivant en caractéristique p

$$M \subset \xi^2 X \qquad \text{et} \qquad X^p \subset G.$$

On a donc C^p contenu dans S et l'extension $S \subset C$ a une p-base

$$c_j \in C \qquad \text{avec } c_j^p = s_j \in S.$$

Choisissons des représentants

$$x_j \in X \qquad \text{avec } c_j = x_j \bmod \xi X$$

et considérons les éléments

$$x_j^p = g_j \in G \qquad \text{avec } s_j = g_j \bmod M.$$

Il existe alors l'homomoprhisme de relèvement

$$\rho : C \to X/\xi^2 X \qquad \text{avec } \rho(c_j) = x_j \bmod \xi^2 X.$$

En résumé on a

$$\lambda = 0 \text{ si } M \not\subset \xi^2 X \qquad \text{et} \qquad \lambda = 1 \text{ si } M \subset \xi^2 X$$

lorsque G de caractéristique p contient X^p.

PROPOSITION 30. *Pour le X-module quasi-fini $H_0(G, X, X)$ le cardinal b est fini si on a la condition*

$$\dim_C H_1(S, C, C) < +\infty$$

pour le module d'imperfection de l'extension résiduelle.

On a en effet les suites exactes, les isomorphismes et les égalités que voici pour le démontrer

$$b + d = \mathrm{Ann}_\xi W \qquad \text{pour } W = H_0(G, X, X),$$

$$H_1(G, X, C) \to H_0(G, X, X) \xrightarrow{\xi} H_0(G, X, X),$$

$$H_2(X, C, C) \to H_1(G, X, C) \to H_1(G, C, C),$$

$$H_1(G, S, C) \to H_1(G, C, C) \to H_1(S, C, C),$$

$$H_2(X, C, C) \cong 0 \qquad \text{et} \qquad H_1(G, S, C) \cong \left(M/M^2\right) \otimes_S C.$$

Remarque 31. Si on prolonge à gauche la suite CV de la démonstration de la Proposition 30

$$H_1(G, X, X) \xrightarrow{\xi} H_1(G, X, X) \to H_1(G, X, C)$$

on remarque que l'hypothèse de la proposition démontre que le X-module $H_1(G, X, X)$ est aussi quasi-fini. En augmentant d'une unité tous les degrés dans la démonstration de la proposition on démontre que le cardinal b du X-module quasi-fini $H_1(G, X, X)$ est aussi fini. Il s'agit d'un X-module de torsion si et seulement si l'extension $E \subset K$ est séparable. Pour $n \geq 2$, sans aucune hypothèse, le X-module $H_n(G, X, X)$ est quasi-fini, de torsion, à cardinal b fini.

CONDITION RENFORCÉE POUR L'EXTENSION RÉSIDUELLE

Considérons une extension de corps $S \subset C$ et intéressons-nous aux trois cardinaux suivants

$$\mu = \dim_C H_0(S, C, C), \qquad \nu = \dim_C H_1(S, C, C)$$

$$\tau = \text{degré de transcendance}.$$

Rappelons que $H_2(S, C, C)$ est toujours nul. En caractéristique nulle, la situation est simple

$$\mu = \tau \qquad \text{et} \qquad \nu = 0.$$

En caractéristique positive, la situation est plus complexe, en effet on peut obtenir tous les cardinaux liés par l'inégalité

$$\mu \leq \nu + \tau .$$

Dans le cas d'une double extension $S \subset T \subset C$, on a une égalité $\tau = \tau' + \tau''$ pour les degrés de transcendance

$$\tau' \text{ de } S \subset T, \qquad \tau \text{ de } S \subset C, \qquad \tau'' \text{ de } T \subset C$$

et une suite JZ

$$\begin{aligned} 0 \to H_1(S,T,C) &\to H_1(S,C,C) \to H_1(T,C,C) \\ &\to H_0(S,T,C) \to H_0(S,C,C) \to H_0(T,C,C) \to 0 \end{aligned}$$

d'où les inégalités suivantes

$$(\nu' + \tau') \leq (\nu + \tau) \leq (\nu' + \tau') + (\nu'' + \tau'')$$
$$(\nu'' + \tau'') \leq (\nu + \tau) + \mu' .$$

Dans le cas d'une extension $S \subset C$ de type fini, on sait que l'on a une égalité de Cartier de nombres entiers $\mu = \nu + \tau$ (voir [1, Proposition 7.6]). Plus généralement soit un entier $n \leq \mu$. Il existe alors un corps intermédiaire T donnant une extension $S \subset T$ de type fini et donnant un homomorphisme

$$H_0(S,T,C) \to H_0(S,C,C)$$

ayant une image de dimension au moins égale à n. On a alors

$$n \leq \mu' = \nu' + \tau' \leq \nu + \tau$$

d'où la conclusion

$$\mu \leq \nu + \tau \qquad \text{si } \nu \text{ et } \tau \text{ sont finis.}$$

LEMME 32. *Dans le cas d'une double extension $S \subset T \subset C$, les cardinaux ν et τ sont finis si et seulement si les cardinaux ν', τ', ν'' et τ'' sont finis. Si cela a lieu, on a en outre une égalité*

$$(\nu + \tau - \mu) = (\nu' + \tau' - \mu') + (\nu'' + \tau'' - \mu'')$$

de nombres positifs ou nuls.

La condition est nécessaire à cause des inégalités suivantes

$$\nu' + \tau' \leq \nu + \tau, \qquad \mu' \leq \nu' + \tau', \qquad \nu'' + \tau'' \leq \nu + \tau + \mu'$$

et la condition est suffisante à cause de l'inégalité suivante

$$\nu + \tau \leq \nu' + \tau' + \nu'' + \tau''.$$

L'égalité pour les trois nombres positifs ou nuls découle de l'égalité

$$(\nu - \mu) = (\nu' - \mu') + (\nu'' - \mu'')$$

due à la suite JZ.

DÉFINITION 33. Une extension de corps $S \subset C$ est appelée une extension de Cartier si on a la propriété suivante

$$\nu + \tau \text{ est fini et égal à } \mu.$$

Il s'agit de la condition τ fini en caractéristique nulle (autrement dit de la Condition 24) et il s'agit d'une condition plus forte que la Condition 24 en caractéristique positive.

Dans le cas d'une double extension $S \subset T \subset C$, l'extension $S \subset C$ est de Cartier si et seulement si les extensions $S \subset T$ et $T \subset C$ sont de Cartier.

LEMME 34. *Une extension de corps $S \subset C$ est une extension de Cartier si et seulement s'il existe deux corps intermédiaires T et D donnant un extension $S \subset T$ transcendante pure de degré de transcendance fini, une extension $T \subset D$ algébrique séparable et une extension $D \subset C$ radicielle de degré fini.*

Vu la remarque précédant le lemme, la condition du lemme est suffisante, puisqu'elle l'est dans les trois cas particuliers essentiels

$\mu = 1 = \tau$, $\quad \nu = 0$, si l'extension est monogène transcendante,

$\mu = 1 = \nu$, $\quad \tau = 0$, si l'extension est monogène radicielle,

$\mu = \nu = \tau = 0$ $\quad$ si l'extension est algébrique séparable.

Pour démontrer la nécessité de la condition, on choisit une base de transcendance

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_\tau \qquad \text{pour l'extension donnée } S \subset C.$$

Puis on considère les deux corps intermédiaires suivants

$$T = S(\gamma_1, \ldots, \gamma_\tau) \qquad \text{et} \qquad D = T_{\text{sép}},$$

ce dernier formé des éléments séparables de l'extension algébrique $T \subset C$. On obtient ainsi une extension transcendante pure $S \subset T$, puis une extension algébrique séparable $T \subset D$, enfin une extension radicielle $D \subset C$ avec la condition

$$\mu = \nu + \tau \qquad (\text{c'est-à-dire } \mu = \nu)$$

puisque la même condition est satisfaite par les autres extensions

$$S \subset C, \qquad S \subset T, \qquad T \subset D.$$

On choisit alors une extension de degré fini $D \subset V$ dans C de manière à avoir un homomorphisme canonique

$$H_0(D,V,C) \to H_0(D,C,C) \qquad \text{surjectif}.$$

Pour l'extension de Cartier $V \subset C$ on a $\mu = 0$ puis $\nu = 0$. Cette extension est donc à la fois séparable et radicielle, donc trivilale. L'égalité $V = C$ démontre que l'extension $D \subset C$ est radicielle de degré fini.

Condition 35. Dorénavant la G-algèbre X est soumise à la condition renforcée suivante: l'extension résiduelle $S \subset C$ est une extension de Cartier. Rappelons que le cardinal b est alors fini pour le X-module quasi-fini $H_0(G, X, X)$, selon la Proposition 30 (voir aussi la Remarque 31).

LEMME 36. *Pour G quotient d'un anneau régulier et pour X complet, la G-algèbre X est quotient d'une G-algèbre G^* formellement lisse, compléte et équidimensionnelle.*

Présentons G sous la forme R/I avec R régulier et utilisons le corps intermédiaire D du Lemme 34. Construisons progressivement un diagramme commutatif du type suivant (anneaux locaux et corps résiduels)

$$\begin{array}{ccccccc} R & \to & R' & \to & R'' & \to & R^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S & \to & D & \to & C & \to & C. \end{array}$$

A partir de l'extension séparable $S \subset D$ et de manière classique on construit une R-algèbre formellement lisse R' donnant un isomorphisme (voir [6, Proposition 10.3.1])

$$R' \otimes_R S \cong D.$$

Comme l'extension $D \subset C$ est de degré fini on construit une R'-algèbre formellement lisse R'' en ajoutant quelques variables, puis en localisant, enfin en complétant:

la R-algèbre R'' est formellement lisse et complète.

On peut obtenir par la lissité formelle un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & X. \end{array}$$

Mais alors la R-algèbre X est quotient de la R-algèbre R^* formellement lisse et complète

$$R^* = R''[[x]] \qquad \text{avec } x \text{ au-dessus de } \xi.$$

Cela étant, on peut considérer la G-algèbre G^*

$$G^* = R^*/IR^* \qquad \text{au-dessus de } X,$$

qui est aussi formellement lisse et complète. Comme R^* est équidimensionnel (car régulier donc intègre), caténaire (car complet), plat sur R (car formellement lisse) et comme I est un idéal premier de R, l'anneau-quotient G^* est aussi équidimensionnel (voir [8, Théorème 31.5]).

Remarque 37. Sans l'hypothèse G quotient d'un anneau régulier, on démontre de la même manière que la G-algèbre X est quotient d'une G-algèbre G^* formellement lisse et complète.

LA DIFFÉRENCE $b - c$ DANS LE CAS COMPLET

Supposons que la G-algèbre X apparaisse avec une décomposition de l'homomorphisme de structure

$$G \xrightarrow{j} G^* \xrightarrow{q} X \qquad \text{avec } Q = \operatorname{Ker} q.$$

LEMME 38. *Si la G-algèbre G^* est formellement lisse, alors on a des isomorphismes*

$$H_n(G, G^*, X) \cong H_n(E, G^*_Q, K) \qquad \textit{pour } n \neq 0.$$

En outre le X-module $H_0(G, G^*, X)$ est sans torsion.

Par hypothèse $H_n(G, G^*, C)$ est nul pour $n \neq 0$ (voir [1, Propositions 4.54 et 7.23]), ce qui permet d'affirmer que l'on a un monomorphisme

$$\xi : H_0(G, G^*, X) \to H_0(G, G^*, X)$$

(et ce module est sans torsion) et des isomorphismes

$$\xi : H_n(G, G^*, X) \to H_n(G, G^*, X) \qquad \text{pour } n \neq 0.$$

Mais alors les isomorphismes

$$H_n(G,G^*,X) \cong H_n(G,G^*,X) \otimes_X K \cong H_n(G,G^*,K)$$
$$\cong H_n(G,G^*_Q,K) \cong H_n(E,G^*_Q,K)$$

permettent de conclure.

Corollaire 39. *Si en outre la E-algèbre G^*_Q est formellement lisse (autrement dit géométriquement régulière), alors le module $H_n(G,G^*,X)$ est nul pour $n \neq 0$.*

Exemple 40. Si l'anneau G est régulier, alors les anneaux G^* et G^*_Q sont réguliers. Mais alors la E-algèbre G^*_Q est géométriquement régulière si en outre G est de caractéristique nulle.

Exemple 41. Si l'anneau G est complet (ou seulement quasi-excellent), alors le théorème de la localisation de la lissité formelle s'applique (voir [3]) et la E-algèbre G^*_Q est formellement lisse.

Corollaire 42. *Si en outre la E-algèbre G^*_Q est formellement lisse, alors il existe une suite JZ*

$$0 \to H_1(G,X,X) \to H_1(G^*,X,X) \to H_0(G,G^*,X) \to$$
$$H_0(G,X,X) \to H_0(G^*,X,X) \to 0,$$

avec au centre un module sans torsion.

Dans le cas $G^* = \hat{G}$, l'isomorphisme du Lemme 38 est présent aussi pour $n = 0$, puisque $H_0(G,\hat{G},C)$ est aussi nul.

Supposons maintenant G et X complets. Comme G est quotient d'un anneau régulier (théorème de Cohen, voir [1, Théorème 10.21]), on peut appliquer le Lemme 36. On a donc une situation comme décrite précédemment, avec les propriétés supplémentaires

$$G^* \text{ est complet, équidimensionnel et } q \text{ est surjectif.}$$

On va utiliser la suite exacte décrite dans le Corollaire 42.

Le module $H_0(G^*,X,X)$ est nul. Le module $H_1(G^*,X,X)$ est de type fini, avec les égalités suivantes pour ses cardinaux

$$\begin{aligned} c - b = a + c &= \dim_K H_1(G^*,X,X) \otimes_X K \\ &= \dim_K H_1(G^*_Q,K,K) \\ &= e.\dim G^*_Q \qquad \text{(la dimension de plongement)} \\ &= \dim G^*_Q \qquad \big(\text{car } G^*_Q \text{ est régulier}\big). \end{aligned}$$

Le module $H_1(G,X,X)$ est donc aussi de type fini, avec les égalités suivantes pour ses cardinaux

$$c - b = a + c = \dim_K H_1(G,X,X) \otimes_X K = \dim_K H_1(E,K,K)$$

ce qui démontre que cette dimension est finie). Le module $H_0(G,G^*,X)$ est sans torsion, quasi-fini puisqu'il s'agit d'une extension d'un module de type fini par un module quasi-fini selon la suite JZ. On a les égalités suivantes pour les cardinaux de ce module sans torsion

$$\begin{aligned} c - b = c + d &= \dim_C H_0(G,G^*,X) \otimes_X C \\ &= \dim_C H_0(G,G^*,C) = \dim_C H_0(S,G^*/MG^*,C). \end{aligned}$$

Comme on a la propriété de lissité formelle

$$H_1(S,G^*/MG^*,C) \cong H_1(G,G^*,C) \cong 0$$

on a la suite JZ suivante

$$\begin{gathered} 0 \to H_1(S,C,C) \to H_1(G^*/MG^*,C,C) \to \\ H_0(S,G^*/MG^*,C) \to H_0(S,C,C) \to 0. \end{gathered}$$

Cette suite exacte donne une égalité

$$\dim_C H_0(S,G^*/MG^*,C) = d.\mathrm{tr}\, C/S + \dim_C H_1(G^*/MG^*,C,C).$$

La S-algèbre G^*/MG^* est formellement lisse, donc en particulier régulière, ce qui donne une égalité

$$\dim_C H_1(G^*/MG^*,C,C) = e.\dim G^*/MG^* = \dim G^*/MG^*.$$

En résumé on a l'égalité suivante concernant $H_0(G,G^*,X)$

$$c - b = d.\mathrm{tr}\, C/S + \dim G^*/MG^*.$$

THÉORÈME 43. *Pour le X-module quasi-fini $H_0(G,X,X)$ on a l'égalité*

$$b - c = (\dim G - 1) - d.\mathrm{tr}\, C/S - \dim_K H_1(E,K,K)$$

lorsque les anneaux G et X sont complets.

D'après la Remarque 13, on sait nulle la somme alternée des différences $b - c$ concernant les modules quasi-finis de la suite exacte du Corollaire 42. Vu les égalités obtenues précédemment il reste à contrôler une égalité concernant des dimensions de Krull

$$\dim G^*_Q - \dim G^*/MG^* = \dim G - 1.$$

Pour l'anneau caténaire équidimensionnel G^* on a l'égalité

$$\dim G^*_Q = \dim G^* - \dim G^*/Q = \dim G^* - 1,$$

et pour la G-algèbre plate G^* on a l'égalité

$$\dim G^* = \dim G + \dim G^*/MG^*$$

(voir [8, Théorème 15.1]). Le théorème est donc démontré.

Retenons pour la suite que le X-module $H_1(G, X, X)$ est de type fini lorsque les anneaux G et X sont complets.

Remarque 44. Dans le cas de caractéristique nulle (sans hypothèse sur la caractéristique résiduelle) l'égalité du théorème est la suivante

$$b - c = (\dim G - 1) - d.\mathrm{tr}\, C/S.$$

Toujours en caractéristique nulle, on a ce même résultat avec la même résultat avec la même démonstration en supposant G régulier et X complet (en remplaçant l'Exemple 41 par l'Exemple 40).

Dorénavant les anneaux G et X ne sont plus supposés complets.

Pour aller plus loin on a besoin de la définition suivante.

DÉFINITION 45. Soit P un idéal premier de $\hat{G}$ (au-dessus de l'idéal premier nul de l'anneau intègre G). On définit alors le nombre entier suivant

$$\Delta_P = e.\dim \hat{G}_P + \dim \hat{G}/P - \dim \hat{G}$$

qui est aussi la différence des deux nombres entiers positifs ou nuls suivants

$$\Delta_P = \left(e.\dim \hat{G}_P - \dim \hat{G}_P\right) - \left(\dim \hat{G} - \dim \hat{G}/P - \dim \hat{G}_P\right).$$

Ce second nombre entier positif ou nul est le suivant

$$\max_{1\le i\le n} \dim \hat{G}/P_i - \max_{1\le i\le m} \dim \hat{G}/P_i$$

pour les n idéaux premiers minimaux P_i de l'anneau $\hat{G}$, les m premiers de ces idéaux étant ceux contenus dans P. Ce second nombre entier est donc nul lorsque $\hat{G}$ est équidimensionnel. Quant au premier nombre entier positif ou nul de la différence, il est nul si et seulement si $\hat{G}_P$ est un anneau régulier.

EXEMPLE 46. Le nombre Δ_P est nul lorsque G est régulier. En effet la régularité de G implique celle de $\hat{G}$, puis celle de $\hat{G}_P$. L'anneau $\hat{G}$ est équidimensionnel puisqu'intègre.

EXEMPLE 47. Le nombre Δ_P est nul lorsque G est excellent. En effet l'excellence de G implique la régularité de $\hat{G}_P$. L'anneau $\hat{G}$ est équidimensionnel puisque G est excellent et intègre (voir [7, Scholie 7.8.3]).

Par la suite l'idéal premier P sera le noyau de l'homomorphisme $\hat{g}$ découlant du monomorphisme de structure g

$$g\colon G \to X \qquad \text{et} \qquad \hat{g}\colon \hat{G} \to \hat{X}.$$

LA DIFFÉRENCE $b - c$ DANS LE CAS DE CARACTÉRISTIQUE NULLE

Les anneaux G et X sont supposés de caractéristique nulle. La caractéristique résiduelle est quelconque. Le noyau de l'homomorphisme de $\hat{G}$ dans $\hat{X}$ est noté P et l'entier Δ_P est celui de la Définition 45. Il est nul si G est excellent ou si G est régulier (Exemples 46 et 47).

On connaît les isomorphismes suivants qui permettent de disposer de modules divisibles sans torsion (donc à différence $b - c$ nulle) et cela pour tout $n \geq 0$ (cas particulier du Lemme 38)

$$H_n(G, \hat{G}, X) \cong H_n\big(E, \hat{G}_P, K\big) \qquad \text{pour } X \text{ complet},$$

$$H_n(X, \hat{X}, \hat{X}) \cong H_n(K, L, L) \qquad (\text{nul pour } n \neq 0).$$

THÉORÈME 48. *Pour le X-module quasi-fini $H_0(G, X, X)$ on a l'égalité*

$$b - c = (\dim G - 1) - d.\mathrm{tr}\, C/S + \Delta_P$$

lorsque les anneaux G et X sont de caractéristique nulle.

On sait que le X-module quasi-fini $H_0(G, X, X)$ donne un $\hat{X}$-module quasi-fini $H_0(G, X, \hat{X})$ avec les mêmes cardinaux. Puisque le module $H_1(X, \hat{X}, \hat{X})$ est nul, on a la suite JZ que voici

$$0 \to H_0(G, X, \hat{X}) \to H_0(G, \hat{X}, \hat{X}) \to H_0\big(X, \hat{X}, \hat{X}\big) \to 0.$$

Puisque le module $H_0(X, \hat{X}, \hat{X})$ est divisible sans torsion, la différence $b - c$ est la même pour les deux autres modules. Mais alors l'égalité du théorème est la même pour les anneaux X et $\hat{X}$. Autrement dit il suffit de démontrer le théorème en supposant X complet.

En général on ne peut pas appliquer le Corollaire 42. Considérons donc l'homomorphisme suivant et son image W

$$H_1(G, X, X) \to H_1(\hat{G}, X, X).$$

Le premier module est de torsion vu l'isomorphisme

$$H_1(G,X,X) \otimes_X K \cong H_1(E,K,K) \cong 0$$

et le second module est de type fini vu la suite exacte suivante et la remarque à la fin de la démonstration du Théorème 43

$$H_1\big(\hat{G},\hat{G}/P,X\big) \to H_1(\hat{G},X,X) \to H_1\big(\hat{G}/P,X,X\big).$$

Par conséquent W est de type fini et de torsion, donc sa différence $b-c$ est nulle.

Considérons maintenant la suite JZ suivante et les différences $b-c$ des quelques modules quasi-finis qu'elle lie

$$0 \to W \to H_1(\hat{G},X,X) \to H_0(G,\hat{G},X)$$
$$\to H_0(G,X,X) \to H_0(\hat{G},X,X) \to 0.$$

La différence $b-c$ est nulle pour le module W de type fini et de torsion et pour le module $H_0(G,\hat{G},X)$ divisible sans torsion. Le module $H_1(\hat{G},X,X)$ est de type fini avec l'égalité

$$c-b = a+c = \dim_K H_1\big(\hat{G}_P,K,K\big)$$
$$= \dim_K H_1\Big(\hat{G}_P,\hat{G}_P/P\hat{G}_P,K\Big) = e.\dim \hat{G}_P$$

(l'extension de corps $\hat{G}_P/P\hat{G}_P \subset K$ est séparable, vu la caractéristique nulle). Le module $H_0(\hat{G},X,X)$ est isomorphe au module $H_0(\hat{G}/P,X,X)$ avec l'égalité du théorème dans le cas complet

$$b-c = \big(\dim \hat{G}/P - 1\big) - d.\mathrm{tr}\, C/S.$$

La somme alternée des différences $b-c$ est nulle et démontre qu'il faut introduire la correction

$$\Delta_P = e.\dim \hat{G}_P + \dim \hat{G}/P - \dim \hat{G}$$

dans l'égalité du théorème.

EXEMPLE 49. Si G est un corps de caractéristique nulle, on a les égalités suivantes

$$c+d = \dim_C H_0(G,C,C) + 1$$

par la Proposition 26, le Lemme 27 et la Remarque 28,

$$b-c = -1 - \dim_C H_0(G,C,C)$$

par le Théorème 48, vu la caractéristique résiduelle nulle. Mais alors $b + d$ est nul et on a le résultat

$$b = 0, \qquad c = \dim_C H_0(G,C,C) + 1, \qquad d = 0.$$

LEMME 50. *Si G est un anneau de valuation discrète et si X est complet, il existe un anneau de valuation discrète intermédiaire G^* avec les deux propriétés suivantes: la G-algèbre G^* est formellement lisse et le G^*-module X est de type fini.*

On utilise le corps intermédiaire D de l'extension résiduelle (voir le Lemme 34 et la démonstration du Lemme 36). Il existe alors une G-algèbre formellement lisse G^*, que l'on peut prendre complète, avec un isomorphisme

$$G^* \otimes_G S \cong D.$$

Il s'agit évidemment d'un anneau de valuation discrète avec la même uniformisante η que G. Avec la G-algèbre formellement lisse G^* et avec l'anneau complet X on a un homomorphisme de G-algèbres

$$\gamma\colon G^* \to X.$$

Comme le noyau de γ est un idéal premier qui ne contient pas η, il s'agit d'un monomorphisme. On le présente sous la forme d'une inclusion

$$G^* \subset X \qquad \text{avec } \eta X = \xi^e X.$$

On a évidemment les modules suivants de type fini: D-module C, G^*-module $X/\xi X$, G^*-module $X/\xi^e X$. Le G^*-module X est donc quasi-fini et séparé. Il est par conséquent de type fini puisque G^* est un anneau de valuation discrète complet (voir le Corollaire 9).

LEMME 51. *Si G est un anneau de valuation discrète de caractéristique nulle, alors le module $H_1(G, X, X)$ est nul.*

Par les Rappels 20 et 21 les modules $H_3(X,C,C)$, $H_2(G,S,C)$ et $H_2(S,C,C)$ sont nuls. Les deux suites JZ

$$H_3(X,C,C) \to H_2(G,X,C) \to H_2(G,C,C)$$
$$H_2(G,S,C) \to H_2(G,C,C) \to H_2(S,C,C)$$

démontrent que le module $H_2(G,X,C)$ est nul. La suite CV

$$H_2(G,X,C) \to H_1(G,X,X) \xrightarrow{\xi} H_1(G,X,X)$$

démontre que le module $H_1(G, X, X)$ est sans torsion. On a donc un monomorphisme

$$H_1(G, X, X) \to H_1(G, X, X) \otimes_X K \cong H_1(E, K, K) \cong 0$$

pour terminer la démonstration.

LEMME 52. *Si G est un anneau de valuation discrète de caractéristique nulle, alors l'entier b du module quasi-fini $H_0(G, X, X)$ est nul.*

Compte tenu du lemme précédent la situation décrite dans le Lemme 50 donne une suite exacte

$$0 \to H_0(G, G^*, X) \to H_0(G, X, X) \to H_0(G^*, X, X) \to 0.$$

L'entier b est nul pour le module de gauche qui est sans torsion et l'entier b est nul pour le module de droite qui est de type fini. Par la Remarque 16, l'entier b est aussi nul pour le module du centre, ce qui démontre le lemme dans le cas complet. Puisque le module $H_1(X, \hat{X}, \hat{X})$ est nul, on a un monomorphisme

$$H_0(G, X, \hat{X}) \to H_0(G, \hat{X}, \hat{X})$$

qui démontre que l'entier b est nul pour le $\hat{X}$-module quasi-fini $H_0(G, X, \hat{X})$. On sait qu'il s'agit de l'entier b pour le module $H_0(G, X, X)$ du cas général.

DÉFINITION 53. Si G n'est pas un corps, on peut considérer

$$\bar{X} = E \cap X,$$

qui est un anneau de valuation discrète, d'uniformisante $\bar{\xi}$, de corps résiduel $\bar{C}$ et de corps des fractions $\bar{K} = E$.

Il est élémentaire de vérifier qu'un $\bar{X}$-module quasi-fini $\bar{W}$ donne un X-module quasi-fini $X \otimes_{\bar{X}} \bar{W}$ avec les mêmes cardinaux a, b, c, d (mais pas d_k en général).

LEMME 54. *Le $\bar{X}$-module $H_0(G, \bar{X}, \bar{X})$ est de torsion. Son entier $\bar{b}$ est égal à l'entier b du X-module $H_0(G, X, X)$.*

Le module est de torsion pour une raison élémentaire, indépendante de la caractéristique,

$$H_0(G, \bar{X}, \bar{X}) \otimes_{\bar{X}} \bar{K} \cong H_0(E, \bar{K}, \bar{K}) \cong 0.$$

Compte tenu du Lemme 51 on a une suite JZ

$$0 \to H_0(G, \overline{X}, X) \to H_0(G, X, X) \to H_0(\overline{X}, X, X) \to 0$$

qui fait intervenir les entiers $\overline{b}, b$ et 0 (Lemme 52). L'égalité de b et $\overline{b}$ est obtenue par la Remarque 16.

THÉORÈME 55 (R. Berger–E. Kunz). *Pour le X-module quasi-fini $H_0(G, X, X)$ l'entier c est égal au degré de transcendance de l'extension résiduelle modifiée $C/\overline{C}$, lorsque les anneaux G et X sont de caractéristique nulle.*

On introduit les égalités $\overline{b} = b$ et $\bar{c} = 0$ dans les deux égalités que donne le Théorème 48.

$$(b - c) = (\dim G - 1) - d.\mathrm{tr}\, C/S + \Delta_P$$

$$(\overline{b} - \bar{c}) = (\dim G - 1) - d.\mathrm{tr}\, \overline{C}/S + \Delta_{\overline{P}}$$

et on obtient une égalité unique

$$c = d.\mathrm{tr}\, C/\overline{C} + (\Delta_{\overline{P}} - \Delta_P).$$

Le monomorphisme de $\overline{X}$ dans X en reste un lorsque l'on complète les anneaux ce qui donne le résultat final

$$\overline{P} = P \qquad \text{et} \qquad \Delta_{\overline{P}} = \Delta_P.$$

EXEMPLE 56. Soit C un corps de caractéristique nulle. D'aprés Ch. Rotthaus (voir [10, Chap. 1]) il existe un anneau local régulier R ayant les propriétés suivantes

$$R \subset \hat{R} = C[[U, V, T]],$$

$$UV \text{ et } T \text{ sont des éléments de } R,$$

$$\text{les idéaux } UVR \text{ et } R \cap (U\hat{R} + V\hat{R}) \text{ sont égaux.}$$

Considérons alors la situation suivante

$$G = R/(UV) \qquad \text{et} \qquad X = \hat{R}/(U, V) \cong C[[T]].$$

On a donc une extension résiduelle triviale $S = C$ et le complété suivant

$$\hat{G} = \hat{R}/(UV) \qquad \text{avec } P = (U, V) \text{ dans } \hat{G}.$$

On a les égalités suivantes

$$e.\dim \hat{G}_P = 2, \qquad \dim \hat{G} = 2, \qquad \dim \hat{G}/P = 1$$

ce qui donne $\Delta_P = 1$ dans le Théorème 48. A cause de l'élément T de R, on a $\lambda = 0$ dans la Proposition 26. Finalement on obtient les entiers $b = 2$, $c = 0$, $d = 0$.

LA DIFFÉRENCE $b - c$ DANS LE CAS DE CARACTÉRISTIQUE POSITIVE

Les anneaux G et X sont supposés de caractéristique positive p. Commençons par calculer l'entier c. Modifions le Lemme 52 de la manière suivante.

LEMME 57. *Si G est un anneau de valuation discrète contenant X^p, alors le X-module $H_0(G, X, X)$ est sans torsion.*

On le démontre rapidement en utilisant l'homologie modifiée dite de Frobenius, qui jouit des deux propriétés fondamentales suivantes

$$F_0(G, X, X) \cong H_0(G, X, X) \qquad \text{et} \qquad F_1(G, X, \cdot) \cong 0,$$

ce foncteur étant nul parce que les anneaux G et X sont réguliers (voir [2, Définition 38, Théorème 68, Proposition 73]).

DÉFINITION 58. Considérons l'anneau intermédiaire

$$X^P \subset G^\# = G[X^P] \subset X.$$

Comme X, il n'a que deux idéaux premiers, l'un nul et l'autre maximal, sans être forcément un anneau noethérien. On a le corps des fractions suivant et le corps résiduel suivant

$$E^\# = E[K^P] \qquad \text{et} \qquad S^\# = S[C^P].$$

On peut considérer le X-module quasi-fini

$$H_0(G^\#, X, X) \cong H_0(G, X, X).$$

DÉFINITION 59. Considérons l'anneau de valuation discrète

$$\tilde{X} = E^\# \cap X \qquad \text{d'uniformisante } \tilde{\xi}$$

(cette intersection n'est pas un corps car elle contient ξ^p). On a le corps des fractions suivant et le corps résiduel $\tilde{C}$

$$\tilde{K} = E[K^p] \qquad \text{et} \qquad S[C^p] \subset \tilde{C} \subset C.$$

On peut considérer le C-module de type fini

$$H_0(S^\#, C, C) \cong H_0(S, C, C),$$

dont $H_0(\tilde{C}, C, C)$ est un quotient.

THÉORÈME 60 (R. Berger−E. Kunz). *Pour le X-module $H_0(G, X, X)$ on a l'égalité*

$$c = \dim_C H_0(\tilde{C}, C, C) + \mu \qquad \textit{avec} \quad \mu = 0 \text{ ou } 1$$

lorsque les anneaux G et X sont de caractéristique positive.

Considérons une suite exacte où W' est de torsion, où W est quasi-fini (donc W'' aussi) et où W'' est sans torsion

$$W' \xrightarrow{f} W \to W'' \to 0.$$

On a alors les égalités

$$\operatorname{Im} f = W_{\text{tor}} \qquad \text{donc } c = c''.$$

Cela s'applique à la suite JZ concernant les modules suivants

$$W' = H_0(G^\#, \tilde{X}, X) \qquad \text{de torsion}$$

puisque $G^\#$ et $\tilde{X}$ ont le même corps des fractions,

$$W = H_0(G^\#, X, X) \cong H_0(G, X, X)$$

avec l'entier c de l'énoncé,

$$W'' = H_0(\tilde{X}, X, X) \qquad \text{sans torsion}$$

d'après le Lemme 57. On a alors l'égalité de la Proposition 26

$$c = c'' + d'' = \dim_C H_0(\tilde{C}, C, C) + \lambda''.$$

On termine avec $\mu = \lambda''$ qui est décrit ci-dessous.

Remarque 61. D'après l'Exemple 29 on a les deux cas suivants. Ou bien l'uniformisante ξ de X peut être choisie dans $\tilde{X}$ (et alors on peut utiliser l'uniformisante $\tilde{\xi} = \xi$ de $\tilde{X}$) et l'entier μ est égal à 0. Ou bien l'uniformisante ξ de X ne peut pas être choisie dans $\tilde{X}$ (et alors on peut utiliser l'uniformisante $\tilde{\xi} = \xi^p$ de $\tilde{X}$) et l'entier μ est égale à 1.

Il s'agit maintenant de calculer la différence $b - c$. A nouveau il faut considérer l'homomorphisme de $\hat{G}$ dans $\hat{X}$, son noyau P et l'entier Δ_P de la Définition 45. Mais cela ne suffit pas; d'après le Théorème 43 qui concerne le cas complet, on sait que le module d'imperfection $H_1(E, K, L)$ doit intervenir.

DÉFINITION 62. Avec les carrés commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \hat{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \hat{X} \end{array} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \hat{G}_P \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & L, \end{array}$$

on peut considérer l'homomorphisme

$$\pi\colon H_1(E, K, L) \to H_1(\hat{G}_P, L, L).$$

On sait que le $\hat{X}$-module $H_1(\hat{G}_P, L, L)$ est de type fini comme le module d'imperfection de l'énoncé du Théorème 43. On obtient donc un L-module de dimension finie

$$\operatorname{Im} \pi \text{ noté } \overline{H}_1(E, K, L).$$

Remarque 63. Dans la suite JZ

$$H_2(K, L, L) \to H_1(E, K, L) \to H_1(E, L, L)$$

le module de gauche est toujours nul. Dans la suite JZ

$$H_1(E, \hat{G}_P, L) \to H_1(E, L, L) \to H_1(\hat{G}_P, L, L)$$

le module de gauche est nul si la E-algèbre $\hat{G}_P$ est géométriquement régulière. On a donc un monomorphisme π et un isomorphisme

$$H_1(E, K, L) \cong \overline{H}_1(E, K, L)$$

si la E-algèbre $\hat{G}_P$ est géométriquement régulière, donc en particulier si l'anneau G est excellent (avec en outre Δ_P nul selon l'Exemple 47).

LEMME 64. *Soit le module sans torsion*

$$V = \operatorname{Im} H_1(G, \hat{X}, \hat{X}) \to H_1(X, \hat{X}, \hat{X})$$

et soit le module de type fini

$$W = \operatorname{Im} H_1(G, \hat{X}, \hat{X}) \to H_1(\hat{G}, \hat{X}, \hat{X}).$$

Alors l'entier c de W est la somme de l'entier c de V et de la dimension de $\overline{H}_1(E, K, L)$.

On a deux suites exactes qui permettent d'appliquer la Remarque 17

$$H_1(G, X, \hat{X}) \to H_1(G, \hat{X}, \hat{X}) \to V \to 0$$

$$H_1(G, \hat{G}, \hat{X}) \to H_1(G, \hat{X}, \hat{X}) \to W \to 0.$$

En effet le module $H_1(G, \hat{G}, \hat{X})$ est divisible. On a alors

$$\overline{W} = \operatorname{Im} H_1(G, X, \hat{X}) \to H_1(\hat{G}, \hat{X}, \hat{X}).$$

Pour ce module de type fini, l'entier $c = a + c$ est égal à la dimension du L-module

$$\operatorname{Im} H_1(G, X, \hat{X}) \otimes_{\hat{X}} L \to H_1(\hat{G}, \hat{X}, \hat{X}) \otimes_{\hat{X}} L$$

c'est-à-dire du L-module

$$\operatorname{Im} \pi = \overline{H}_1(E, K, L).$$

L'égalité des entiers de la Remarque 17 permet de conclure.

THÉORÈME 65. *Pour le X-module quasi-fini $H_0(G, X, X)$ on a l'égalité*

$$b - c = (\dim G - 1) - d.\mathrm{tr}\, C/S - \dim_L \overline{H}_1(E, K, L) + \Delta_P$$

lorsque les anneaux G et X sont de caractéristique positive.

Il faut adapter la démonstration du Théorème 48. Le premier paragraphe de cette démonstration devient le Lemme 64 et voici ce qui concerne les deux autres.

Considérons à nouveau la suite JZ suivante et les différences $b - c$ des quelques modules quasi-finis qu'elle lie

$$0 \to W \to H_1(\hat{G}, \hat{X}, \hat{X}) \to H_0(G, \hat{G}, \hat{X})$$

$$\to H_0(G, \hat{X}, \hat{X}) \to H_0(\hat{G}, \hat{X}, \hat{X}) \to 0.$$

Le module $H_0(G, \hat{G}, \hat{X})$ est divisible sans torsion avec l'égalité

$$b - c = 0.$$

Le module $H_1(\hat{G}, \hat{X}, \hat{X})$ est de type fini avec l'égalité

$$c - b = a + b = \dim_L H_1(\hat{G}_P, L, L)$$

$$= e.\dim \hat{G}_P + \dim_L H_1(\hat{G}_P/P\hat{G}_P, L, L)$$

compte tenu de la suite JZ que voici

$$0 \cong H_2\big(\hat{G}_P/P\hat{G}_P, L, L\big) \to H_1\big(\hat{G}_P, \hat{G}_P/P\hat{G}_P, L\big) \to H_1\big(\hat{G}_P, L, L\big)$$

$$\to H_1\big(\hat{G}_P/P\hat{G}_P, L, L\big) \to H_0\big(\hat{G}_P, \hat{G}_P/P\hat{G}_P, L\big) \cong 0.$$

Le module $H_0(\hat{G}, \hat{X}, \hat{X})$ est isomorphe au module $H_0(\hat{G}/P, \hat{X}, \hat{X})$ avec l'égalité du théorème dans le cas complet

$$b - c = \big(\dim \hat{G}/P - 1\big) - d.\mathrm{tr}\, C/S - \dim_L H_1\big(\hat{G}_P/P\hat{G}_P, L, L\big).$$

La somme alternée des différences $b - c$ est nulle, ce qui démontre le résultat suivant:

$$(\dim G - 1) - d.\mathrm{tr}\, C/S + \Delta_P - (c \text{ de } W)$$

est égal à la différence $b - c$ du module $H_0(G, \hat{X}, \hat{X})$.

Considérons aussi la suite JZ suivante et les différences $b - c$ des quelques modules quasi-finis qu'elle lie

$$0 \to V \to H_1(X, \hat{X}, \hat{X}) \to H_0(G, X, \hat{X})$$

$$\to H_0(G, \hat{X}, \hat{X}) \to H_0(X, \hat{X}, \hat{X}) \to 0.$$

Les modules $H_n(X, \hat{X}, \hat{X})$ sont divisibles sans torsion, donc avec $b - c$ nul. Le module V est sans torsion, donc avec $b - c$ égal à $-c$. Le $\hat{X}$-module $H_0(G, X, \hat{X})$ a la même différence $b - c$ que le X-module $H_0(G, X, X)$. La somme alternée des différences $b - c$ est nulle, ce qui démontre le résultat suivant:

$$b - c \text{ de } H_0(G, \hat{X}, \hat{X}) + (c \text{ de } V)$$

est égal à la différence $b - c$ du module $H_0(G, X, X)$.

L'égalité du Lemme 64 termine la démonstration du théorème.

PROPOSITION 66. *Lorsque X est complet et que X^P est contenu dans G, l'anneau $\hat{G}$ a un unique idéal premier minimal, le noyau P de son homomorphisme de Frobenius. En outre la dimension de plongement de l'anneau artinien $\hat{G}_P$ est égale à l'entier b du module quasi-fini $H_0(G, X, X)$.*

Aux homomorphisms canoniques $G \to \hat{G}$ et $\hat{G} \to X$ on adjoint l'homomorphisme de Frobenius $X \to G$. On obtient ainsi un triple de Frobenius (voir [2, Définition 15])

$$\to G \to \hat{G} \to X \to .$$

En effet l'homomorphisme composé

$$\hat{G} \to X \to G \to \hat{G}$$

est l'unique homomorphisme qui prolonge l'homomorphisme composé

$$G \to \hat{G} \to X \to G \to \hat{G}$$

c'est-à-dire l'homomorphisme composé

$$G \xrightarrow{\mathrm{Fr}} G \to \hat{G} \qquad \text{ou} \qquad G \to \hat{G} \xrightarrow{\mathrm{Fr}} \hat{G},$$

et cet unique prolongement est donc bien l'homomorphism de Frobenius de $\hat{G}$. Pour ce triple de Frobenius, on a

$$\operatorname{Spec} G \cong \operatorname{Spec} X \cong \operatorname{Spec} \hat{G},$$

donc $\hat{G}$ est local, de dimension 1, avec un unique premier minimal P. Il est élémentaire de vérifier qu'il s'agit du noyau de l'homomorphisme de Frobenius de $\hat{G}$.

Le S-module C est de type fini, puisque l'extension en question a une p-base finie. On a donc successivement les $\hat{G}$-modules de longueur finie $X/\xi X$, puis $X/\xi^P X$, enfin X/MX. Pour la topologie M-adique l'anneau $\hat{G}$ est complet et le $\hat{G}$-module X est séparé. Mais alors le $\hat{G}$-module X est de type fini. Par conséquent le X-module $H_0(\hat{G}, X, X)$ est de type fini. Pour ce module l'entier b est nul et l'entier c se calcule par le Théorème 43

$$c = \dim_K H_1\big(\hat{G}_P / P\hat{G}_P, K, K\big).$$

Comme $H_0(G, X, X)$ est la somme directe non-canonique de $H_0(\hat{G}, X, X)$ et d'un module divisible, à savoir

$$\operatorname{Im} H_0(G, \hat{G}, X) \to H_0(G, X, X),$$

il s'agit en fait ci-dessus de l'entier c du X-module $H_0(G, X, X)$.

Il s'agit maintenant d'appliquer le Théorème 65. On a des égalités évidentes

$$\dim G = 1, \qquad d.\mathrm{tr}\, C/S = 0, \qquad \Delta_P = e.\dim \hat{G}_P.$$

La proposition découle donc de l'égalité suivante

$$\dim_K \overline{H}_1(E, K, K) = \dim_K H_1\big(\hat{G}_P / P\hat{G}_P, K, K\big)$$

démontrée dans la remarque suivante.

Remarque 67. On va utiliser l'homologie de Frobenius. Le triple de Frobenius de la démonstration précédente donne deux triples de Frobenius

$$\to E \to \hat{G}_P \to \hat{G}_P/P\hat{G}_P \to ,$$

$$\to E \to \hat{G}_P/P\hat{G}_P \to K \to .$$

On a un premier carré commutatif (voir [2, Remarque 35])

$$\begin{array}{ccc} H_1\left(E, \hat{G}_P/P\hat{G}_P, K\right) & \xrightarrow{u} & H_1\left(\hat{G}_P, \hat{G}_P/P\hat{G}_P, K\right) \\ \big\downarrow{\scriptstyle s} & & \big\downarrow{\scriptstyle t} \\ F_1\left(E, \hat{G}_P/P\hat{G}_P, K\right) & \longrightarrow & F_1\left(\hat{G}_P, \hat{G}_P/P\hat{G}_P, K\right) \end{array}$$

où le but de s est nul (voir [2, Proposition 73]) et où t est un isomorphisme (voir [2, Remarque 35]), donc où u est nul. On a un second carré commutatif (voir [2, Remarque 35])

$$\begin{array}{ccc} H_1\left(\hat{G}_P/P\hat{G}_P, K, K\right) & \xrightarrow{\gamma} & H_0\left(E, \hat{G}_P/P\hat{G}_P, K\right) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \big\downarrow{\scriptstyle \beta} \\ F_1\left(\hat{G}_P/P\hat{G}_P, K, K\right) & \longrightarrow & F_0\left(E, \hat{G}_P/P\hat{G}_P, K\right) \end{array}$$

où le but de α est nul (voir [2, Proposition 73) et où β est un isomorphisme donc où γ est nul. Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} H_1(E, \hat{G}_P/P\hat{G}_P, K) & \longrightarrow & H_1(E, K, K) & \xrightarrow{v} & H_1(\hat{G}_P/P\hat{G}_P, K, K) \\ \big\downarrow{\scriptstyle u} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \big\downarrow \\ H_1(\hat{G}_P, \hat{G}_P/P\hat{G}_P, K) & \longrightarrow & H_1(\hat{G}_P, K, K) & \xrightarrow{w} & H_1(\hat{G}_P/P\hat{G}_P, K, K). \end{array}$$

Comme u est nul et v surjectif (car $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} \gamma$ sont égaux), on obtient un isomorphisme

$$w|\operatorname{Im} \pi : \overline{H}_1(E, K, K) \to H_1\left(\hat{G}_P/P\hat{G}_P, K, K\right)$$

ce qui termine la démonstration de la Proposition 66.

PROPOSITION 68. *Lorsque X est complet et que G est excellent, l'anneau $G^\# = G[X^p]$ est noethérien et son complété $\hat{G}^\#$ a un unique idéal premier minimal P. La dimension de plongement de l'anneau artinien $\hat{G}^\#_P$ est égale à l'entier b du module quasi-fini $H_0(G, X, X)$.*

Par le théorème de localisation de la lissité formelle (voir [3]), l'homomorphisme $G \to G^*$ de la Remarque 37 est régulier. On a donc la propriété (c'est un résultat de N. Radu, voir [9]; pour une démonstration plus facile, voir [4])

$$G \otimes_{G^P} G^{*P} \text{ est un anneau noethérien.}$$

Puisque l'anneau $G^\#$ en est un quotient, il est lui aussi noethérien. Compte tenu de l'isomorphisme

$$H_0(G, X, X) \cong H_0(G^\#, X, X)$$

la Proposition 68 est donc un corollaire de la Proposition 66.

REFERENCES

1. M. André, "Homologie des algèbres commutatives," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1974.
2. M. André, Homologie de Frobenius, *Math. Ann.* **290** (1991), 129–181.
3. M. André, Localisation de la lissité formelle, *Manuscripta Math.* **13** (1974), 297–307.
4. M. André, Autre démonstration du théorème liant régularité et platitude en caractéristique p, *Manuscripta Math.* **82** (1994), 363–379.
5. R. Berger et E. Kunz, Über die Struktur der Differentialmoduln von diskreten Bewertungsringen, *Math. Z.* **77** (1961), 314–338.
6. A. Grothendieck, "Eléments de géométrie algébrique. III. Première partie," Presses Universitaires, Paris, 1961.
7. A. Grothendieck, "Eléments de géométrie algébrique. IV. Seconde partie," Presses Universitaires, Paris, 1965.
8. H. Matsumura, "Commutative Ring Theory," Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
9. N. Radu, Une classe d'anneaux noethériens, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **37** (1992), 79–82.
10. Ch. Rotthaus, Nicht ausgezeichnete universell japanische Ringe, *Math. Z.* **152** (1977), 107–125.
11. D. Sharpe et P. Vamos, "Injective Modules," Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1972.